

Тема: Показникові нерівності

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення показникової нерівності, навчитися розв'язувати показникові нерівності методами, подібними до методів розв'язування показникових рівнянь;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати показникові нерівності різними способами;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

• Розв'язування нерівностей

- Як саме ми можемо розв'язати звичайну нерівність?
(За допомогою методу рівносильних перетворень або методу інтервалів)
- У чому полягає суть методу рівносильних перетворень?

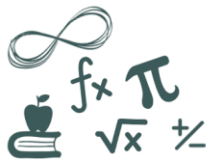
Метод рівносильних перетворень

1. Врахувати ОДЗ початкової нерівності.
2. Зберігати на ОДЗ правильну нерівність при прямих і зворотних перетвореннях.

- У чому полягає суть методу інтервалів?

Метод інтервалів

1. Знайти ОДЗ.



2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$.
 3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.
 4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.
- Які ми вже знаємо **теореми про рівносильні перетворення** для нерівностей?
1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій
➤ Чи буде ця теорема справджуватися на будь-якій множині?
(На будь-якій множині)
 2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме **додатне число** (або на одну й ту саму функцію, що визначена і **додатна** на ОДЗ заданої нерівності), **не змінюючи знак** нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій
➤ Чи буде ця теорема справджуватися на будь-якій множині?
(На ОДЗ заданої)
 3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме **від'ємне число** (або на одну й ту саму функцію, що визначена і **від'ємна** на ОДЗ заданої нерівності) і **змінити знак нерівності на протилежний**, то одержимо нерівність, рівносильну заданій
➤ Чи буде ця теорема справджуватися на будь-якій множині?
(На ОДЗ заданої)

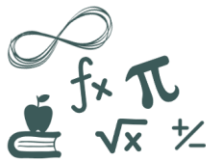
III. Вивчення нового матеріалу

• Показникові нерівності

$$\left. \begin{array}{l} 3^x \geq 9 \\ 2^x + 5^x > 1 \\ 2^x + 2^{x-1} < 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Показникові нерівності містять змінну} \\ \text{тільки у показнику степеня} \end{array}$$

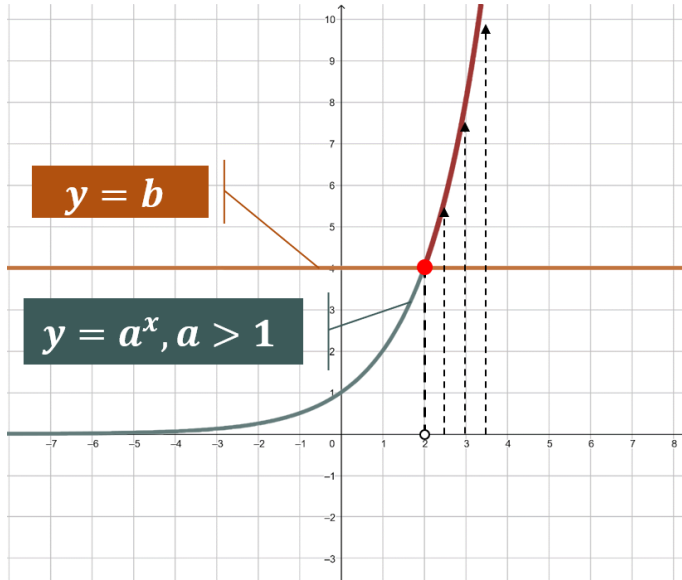
Найпростіші показникові нерівності: $\left| \begin{array}{l} a^x > b, a^x < b, a^x \geq b, a^x \leq b \\ a > 0, a \neq 1, b > 0 \end{array} \right.$

- Пригадайте теорему для показникових рівнянь. Чи буде теорема для показникових нерівностей аналогічною?
(Теорема: При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$)



- Розглянемо найпростішу показникову нерівність $a^x > b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)

Нехай $b = a^c \Rightarrow a^x > a^c$, у випадку $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає



Більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, отже:

$$a^x > a^c \Rightarrow x > c$$

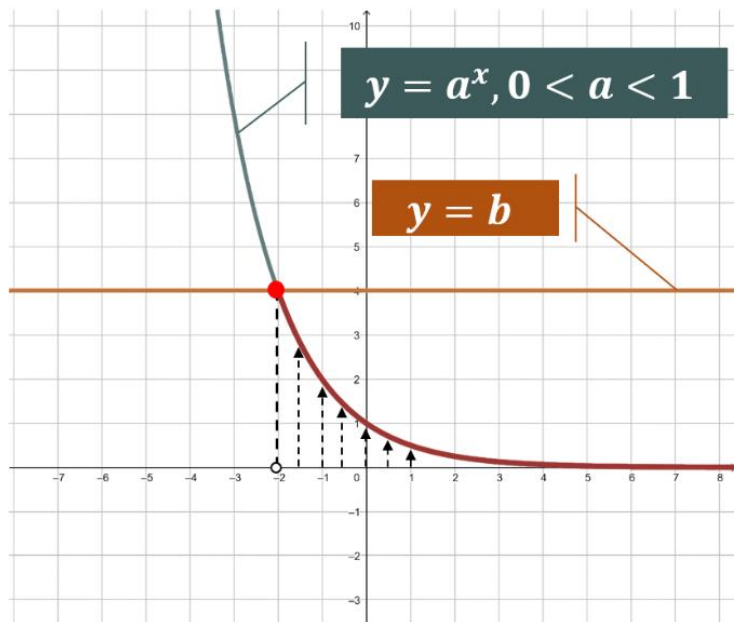
Знак нерівності не змінюється

- У випадку $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає:

Більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, отже:

$$a^x > a^c \Rightarrow x < c$$

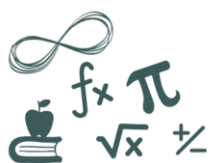
Знак нерівності змінюється на протилежний



Теорема

Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$;

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$



*Можливий запис в зошиті

Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то $f(x) > g(x)$
Якщо $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$

• Розв'язування показникових нерівностей

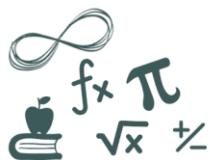
- Пригадайте методи розв'язування показникових рівнянь
 1. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами
 2. Метод введення нової змінної
 3. Функціонально-графічний метод
- Чи можемо ми користуватися цими методами для розв'язування показникових нерівностей?
Так:
 1. Метод зведення обох частин нерівності до степенів з однаковими основами
 2. Метод введення нової змінної
 3. Функціонально-графічний метод
- Поясніть, у чому полягає суть кожного методу?
- Отже, для розв'язування показникових нерівностей використовують ті самі методи, що й для показникових рівнянь, а також правила розв'язування найпростіших показникових нерівностей (розглянута нами теорема, що базується на монотонності (зростанні чи спаданні) показникової функції)

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$	Так
2) $0,9^{x^2-4} < 0,9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$	Ні
3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$	Так
4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$	Ні



Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$

Розв'язок:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x < 2$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -2)$

2) $5^x < \frac{1}{5}$

Розв'язок:

$$5^x < 5^{-1}$$
$$x < -1$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -1)$

3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$

Розв'язок:

$$x - 5 < 3x + 1$$
$$2x > -6$$
$$x > -3$$

Відповідь: $x \in (-3; +\infty)$

4) $0,4^{6x+1} \geq 0,4^{2x+5}$

Розв'язок:

$$6x + 1 \leq 2x + 5$$
$$4x \leq 4$$
$$x \leq 1$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1]$

5) $0,3^{4x-8} > 1$

Розв'язок:

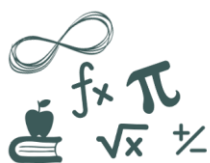
$$0,3^{4x-8} > 0,3^0$$
$$4x - 8 < 0$$
$$4x < 8$$
$$x < 2$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 2)$

6) $9^{1-3x} \leq 0$

Розв'язок:

Так як $9^{1-3x} > 0$ для $x \in \mathbb{R}$, то нерівність не має розв'язків.



Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2-1} < 8$

Розв'язок:

$$2^{x^2-1} < 2^3$$

$$x^2 - 1 < 3$$

$$x^2 < 4$$

*Так як $x^2 = \left| \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \right|$, і нам необхідна

множина яка в «квадраті» буде приймати значення «менше 4-х», то отримаємо множину всіх додатніх чисел менших за «2», всі від'ємні числа більші за «-2» і число «0». Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності:

$$-2 < x < 2$$

Відповідь: $x \in (-2; 2)$

2) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$

Розв'язок:

$$3^{3(2x+1)} > 3^{-2(x+2)}$$

$$3(2x+1) > -2(x+2)$$

$$6x+3 > -2x-4$$

$$8x > -7$$

$$x > -\frac{7}{8}$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{7}{8}; +\infty\right)$

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$

Розв'язок:

$$6x - x^2 < 5$$

$$-x^2 + 6x - 5 < 0$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

*Далі розкладемо цей квадратний тричлен на лінійні множники для повторення вивченого у попередніх класах матеріалу

3) $0,1^{3x-1} < 1000$

Розв'язок:

$$10^{-(3x-1)} < 10^3$$

$$-3x + 1 < 3$$

$$3x > -2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

4) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$

Розв'язок:

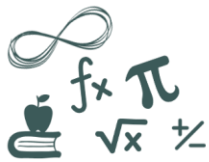
$$6^{-2(2-x)} < 6^{3(x+1)}$$

$$-2(2-x) < 3(x+1)$$

$$-4 + 2x < 3x + 3$$

$$x > -7$$

Відповідь: $x \in (-7; +\infty)$



- Якій нерівності рівносильна ця нерівність?

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1, x_2 - корені рівняння

- Чи завжди можна розкласти квадратний тричлен на лінійні множники?
Якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.

$$(x - 5)(x - 1) > 0$$

- Які розв'язки має ця нерівність?

$$x < 1 \text{ або } x > 5$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$

$$6) 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$$

Розв'язок:

$$5^3 \cdot 5^{-1(3x^2)} \geq 5^{-2(-4x)}$$

$$5^{3-3x^2} \geq 5^{8x}$$

$$3 - 3x^2 \geq 8x$$

$$3x^2 + 8x - 3 \leq 0$$

$$f(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

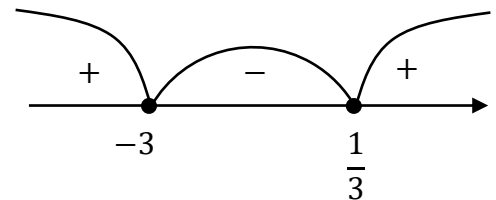
2. Нулі функції: $f(x) = 0$

$$D = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

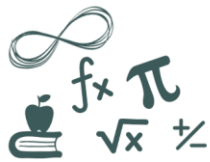
$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

3. Позначимо нулі функції та знайдемо знак у кожному з проміжків:

4. Так як знак нашої функції менше/рівно нуля, оберемо проміжок $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$.



Відповідь: $x \in \left[-3; \frac{1}{3}\right]$



$$7) \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2}$$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5} &> \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ x-0,5 &< -0,5 \\ x &< 0 \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 0)$

$$8) 4 \cdot 0,5^{x(x+3)} \geq 0,25^{2x}$$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} (0,5)^{-2} \cdot 0,5^{x(x+3)} &\geq 0,5^{2(2x)} \\ 0,5^{-2+x^2+3x} &\geq 0,5^{4x} \\ -2+x^2+3x &\leq 4x \\ x^2-x-2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

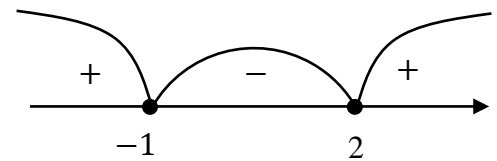
1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції: $f(x) = 0$

За теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

3. Позначимо нулі функції та знайдемо знак у кожному з проміжків:

4. Так як знак нашої функції менше/рівно нуля, оберемо проміжок $[-1; 2]$



Відповідь: $x \in [-1; 2]$

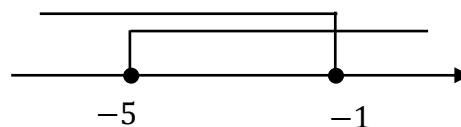
№4

Скільки цілих розв'язків має нерівність:

$$1) 0,2 \leq 5^{x+4} \leq 125$$

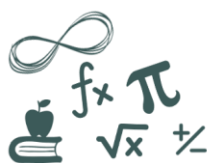
Розв'язок:

$$\begin{aligned} 5^{-1} &\leq 5^{x+4} \leq 5^3 \\ -1 &\leq x+4 \leq 3 \\ -5 &\leq x \leq -1 \end{aligned}$$



Цілі розв'язки: $-5; -4; -3; -2; -1$.

Відповідь: 5



$$2) \frac{1}{36} \leq 6^{3-x} < 6$$

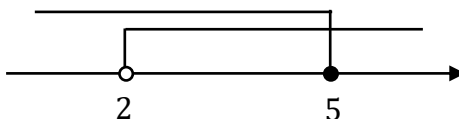
Розв'язок:

$$6^{-2} \leq 6^{3-x} < 6^1$$

$$-2 \leq 3 - x < 1$$

$$-5 \leq -x < -2$$

$$5 \geq x > 2$$



Цілі розв'язки: 3; 4; 5

Відповідь: 3

$$3) 2 < 0,5^{x-1} \leq 32$$

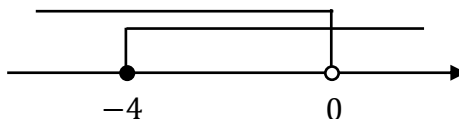
Розв'язок:

$$2^1 < 2^{-1(x-1)} \leq 2^5$$

$$1 < -x + 1 \leq 5$$

$$0 < -x \leq 4$$

$$0 > x \geq -4$$



Цілі розв'язки: -4; -3; -2; -1

Відповідь: 4

№5

Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

Розв'язок:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$x \geq 0$$

Відповідь: $x \in [0; +\infty)$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$$

Розв'язок:

$$3^{x+2} - 27 > 0$$

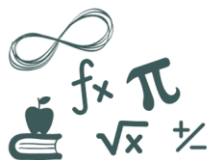
$$3^{x+2} > 27$$

$$3^{x+2} > 3^3$$

$$x + 2 > 3$$

$$x > 1$$

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$



Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$

Розв'язок:

$$7^x(7^2 - 14) > 5$$

$$7^x(49 - 14) > 5$$

$$7^x \cdot 35 > 5$$

$$7^x > \frac{5}{35}$$

$$7^x > \frac{1}{7}$$

$$7^x > 7^{-1}$$

$$x > -1$$

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$

2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$

Розв'язок:

$$3^x(9 \cdot 3^{-1} + 1) < 36$$

$$3^x \cdot 4 < 36$$

$$3^x < 9$$

$$3^x < 3^2$$

$$x < 2$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 2)$

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$

Розв'язок:

$$2^{x-2}(2^{x-x+2} + 2^{x-1-x+2} + 1) > 56$$

$$2^{x-2}(2^2 + 2^1 + 1) > 56$$

$$2^{x-2} \cdot 7 > 56$$

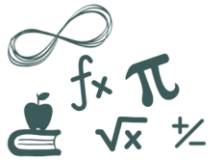
$$2^{x-2} > 8$$

$$2^{x-2} > 2^3$$

$$x - 2 > 3$$

$$x > 5$$

Відповідь: $x \in (5; +\infty)$



Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$

Розв'язок:

Нехай $3^x = t$:

$$t^2 - 4t - 45 > 0$$

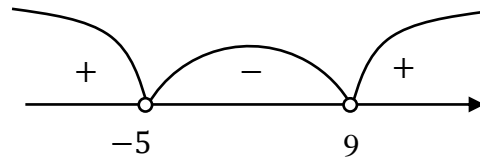
За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = -5 \end{cases}$

$$t < -5$$

$$t > 9$$

$$\begin{aligned} 3^x < -5 & \Rightarrow \emptyset \\ 3^x > 9 & \Rightarrow 3^x > 3^2 \Rightarrow x > 2 \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (2; +\infty)$



2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$

Розв'язок:

$$2^{2x} + 2^x \cdot 2^3 - 20 < 0$$

$$2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 20 < 0$$

Нехай $2^x = t$:

$$t^2 + 8t - 20 < 0$$

$$f(x) = t^2 + 8t - 20$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції: $f(x) = 0$

За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 = -10 \\ t_2 = 2 \end{cases}$

3. Позначимо нулі функції та знайдемо знак у кожному з проміжків:

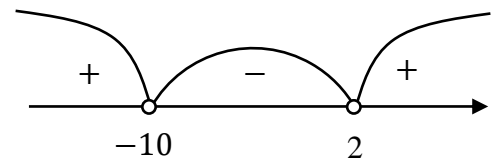
4. Так як знак нашої функції менше нуля, оберемо проміжок $[-10; 2]$

$$t > -10$$

$$t < 2$$

$$\begin{aligned} 2^x > -10 & \Rightarrow \emptyset \\ 2^x < 2 & \Rightarrow 2^x < 2^1 \Rightarrow x < 1 \end{aligned}$$

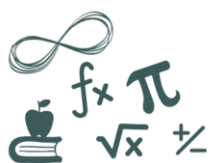
Відповідь: $x \in (-\infty; 1)$



3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leq 0$

Розв'язок:

$$7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 \leq 0$$



Нехай $7^x = t$:

$$t^2 - 8t + 7 \leq 0$$

$$f(x) = t^2 - 8t + 7$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції: $f(x) = 0$

За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 = 7 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

3. Позначимо нулі функції та знайдемо знак у кожному з проміжків:

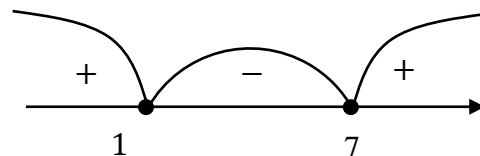
4. Так як знак нашої нерівності менше нуля, оберемо проміжок $[1; 7]$

$$t \geq 1$$

$$t \leq 7$$

$$\begin{aligned} 7^x \geq 1 & \Rightarrow 7^x \geq 7^0 \Rightarrow x \geq 0 \\ 7^x \leq 7 & \Rightarrow 7^x \leq 7^1 \Rightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in [0; 1]$



V. Підсумок уроку

- Які нерівності називають показниковими?
- Які нерівності називаються найпростішими показниковими нерівностями?
- Як розв'язати нерівність виду $a^x > b$, якщо $b = a^c$ і $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність виду $a^x > b$, якщо $b = a^c$ і $0 < a < 1$?
- До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$?
- До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $0 < a < 1$?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст.17-18)

Виконати № 3.3; 3.5(1-3); 3.7; 3.9; 3.11 (1,2); 3.13(1-2); 3.16

Мерзляк А.Г.

Опрацювати §3

Виконати № 3,2; 3,6; 3,10; 3,16

Істер О.С.

Опрацювати §2 (п.2.3)

Виконати № 2.3.1 (2,6,8); 2.3.2 (3,5,6);

Нелін Є.П.

Опрацювати §2 (ст.17)

Виконати № 63, 65, 70

Бевз Г.П.